

doi: 10.11720/wtyht.2018.1.16

黄杰,杨国权,李振春,等.TTI 介质拟声波方程数值模拟[J].物探与化探,2018,42(1):134-143.http://doi.org/10.11720/wtyht.2018.1.16

Huang J, Yang G Q, Li Z C, et al. Numerical simulation of pseudo acoustic wave equation in TTI medium[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2018, 42(1): 134-143. http://doi.org/10.11720/wtyht.2018.1.16

TTI 介质拟声波方程数值模拟

黄杰,杨国权,李振春,谷丙洛

(中国石油大学(华东)地球科学与技术学院,山东 青岛 266580)

摘 要: TTI 介质 qP 波数值模拟方法因为考虑了倾角因素,可以比 VTI 介质 qP 波数值模拟方法更加准确地描述各向异性介质中地震波场的传播规律。文中用拟声波方程对 TTI 介质中的地震波场进行了高阶有限差分数值模拟,在改进衰减函数分布方式后,通过坐标变换,利用改进的完全匹配层(perfectly matched layer, PML)边界控制方程对波场边界进行吸收处理,取得了良好的效果;然后分析了拟声波方程数值模拟中的稳定性问题,并对波场中的伪横波进行压制。通过对不同模型的数值模拟,验证了文中使用的 TTI 介质拟声波波动方程的稳定性以及所采用的 PML 边界控制方程的可靠性和适用性。

关键词: TTI 介质;拟声波方程;PML 边界控制方程;稳定性;伪横波

中图分类号: P631.4

文献标识码: A

文章编号: 1000-8918(2018)01-0134-10

0 引言

地震波场数值模拟是研究地震波在地下介质中传播规律的有效手段;有限差分法由于其计算速度快、精度高的优点,成为目前应用最为广泛的方法^[1]。

大量的研究表明,各向异性广泛存在于地下介质中。基于各向同性的假设无法准确地描述地震波在地下实际介质中的传播规律。前人对各向同性的研究,无论是理论上还是实际应用都发展得相当成熟了,考虑了各向异性的因素,对地震勘探来说有着十分重要的作用。若只是考虑各向同性或基于 VTI 介质的假设,在对盐丘侧翼、盐下等的复杂构造进行数值模拟时,就会产生运动学和动力学上的误差,并最终影响偏移成像的效果。在 TTI 介质中,其对称轴方向与垂直方向已不再一致;但从物理上来说,TTI 介质与 VTI 介质并没有本质区别,只不过是观测坐标系与描述介质对称性的物理坐标系有一定夹角而已。

自从 Alkhalifah^[2-3]在 VTI 介质研究中,从频散关系出发,提出了声学近似的思想(即假设沿对称

轴方向的横波速度为零),并推导出 VTI 介质四阶拟声波偏微分方程,许多学者对 VTI 介质拟声波方程正演模拟及逆时偏移进行了更深入的研究,并逐渐向 TTI 介质发展。但由于四阶偏微分方程求解过程十分复杂,Zhou 等^[4]、Du 等^[5]和 Hestholm^[6]推导了 VTI 介质 2 阶耦合的拟声波方程。Zhou 等^[7]、Fletcher 等^[8]基于声学近似的 TTI 介质频散关系,通过引入辅助波场函数,推导出不同的 2 阶耦合的拟声波方程,但辅助函数的物理意义并不明确。Duvénéck^[9-10]从胡克定律和运动方程出发,推导出 VTI 介质拟声波波动方程,并赋予水平和垂直应力分量明确的物理意义,而后又推广到 TTI 介质。2010 年,Fowler 等^[11]给出了二阶拟声波偏微分方程的一般形式,并认为它们彼此等价,可以相互转化。但几种拟声波方程都存在低速、低振幅的 qSV 波干扰问题,这会对正演模拟和偏移成像的结果造成影响。针对这一问题,Liu^[12]、Pestana 等^[13]、Chu 等^[14]、Zhan 等^[15]、Barrera 等^[16]进行了较为深入的研究。

笔者基于二阶 TTI 介质拟声波方程,利用改进的 PML 边界控制方程对边界进行吸收处理,并进行了模型试算,数值模拟结果证明了拟声波方程的稳定性和改进的边界条件的有效性。

收稿日期: 2016-11-18;修回日期: 2017-10-23

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)课题(2014CB239006),国家自然科学基金项目(41504100)

作者简介: 黄杰(1991-),男,硕士研究生,主要从事地震波正演模拟与逆时偏移工作。Email:18205420120@163.com

1 稳定的 TTI 介质拟声波方程

从 Christoffel 方程出发,可以得到精确的 TTI 介质 qP-qSV 波频散关系^[8]为:

$$\omega^4 = [(v_{px}^2 + v_{sz}^2)T_2 + (v_{pz}^2 + v_{sz}^2)T_1]\omega^2 + v_{px}^2 v_{sz}^2 T_2^2 + [v_{pz}^2(v_{pn}^2 - v_{px}^2) + v_{sz}^2(v_{pn}^2 + v_{pz}^2)]T_1 T_2 + v_{pz}^2 v_{sz}^2 T_1^2, \quad (1)$$

其中:

$$\begin{cases} T_1 = k_x^2 \sin^2 \theta + k_z^2 \cos^2 \theta + k_x k_z \sin 2\theta, \\ T_2 = k_x^2 \cos^2 \theta + k_z^2 \sin^2 \theta - k_x k_z \sin 2\theta. \end{cases} \quad (2)$$

$v_{pn} = v_{pz} \sqrt{1+2\delta}$ 、 $v_{px} = v_{pz} \sqrt{1+2\varepsilon}$ 、 v_{pz} 分别为 NMO 速度、对称平面的切线速度、关于对称平面的法线速度, θ 为对称轴的倾角, ε 和 δ 为 Thomsen 各向异性参数^[17], ω 为角频率, k_x 、 k_z 为空间波数。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_p^2 \left[(1+2\varepsilon) \left(\cos^2 \theta \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \sin 2\theta \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \right) + \sqrt{1+2\delta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial z} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v_p^2 \left[\sqrt{1+2\delta} \left(\cos^2 \theta \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \sin 2\theta \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \right) + \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial z} \right) \right]. \end{cases} \quad (6)$$

2 TTI 介质拟声波波动方程高阶有限差分

2.1 二阶偏导数高阶精度差分系数

对二阶偏导数项采用 $2N$ 阶精度有限差分进行求解,以压制数值频散,提高数值模拟精度。差分系数的求取主要是通过泰勒级数展开法,通过求解以下系数方程

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & N^2 \\ 1^4 & 2^4 & \cdots & N^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2N} & 2^{2N} & \cdots & N^{2N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

可得差分系数^[19]。差分权系数为:

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1} \prod_{i=1, i \neq n}^N i^2}{n^2 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2) \prod_{i=n+1}^N (i^2 - n^2)} \quad (n = 1, 2, \dots, N, N > 2) \quad (8)$$

其中: $c_0 = -2 \sum_{i=1}^N c_i$

则有:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{ c_0 u(x) + \sum_{n=1}^N c_n [u(x+n\Delta x) + u(x-n\Delta x)] \}. \quad (9)$$

2.2 混合偏导数高阶精度差分系数

相比于各向同性介质和 VTI 介质波动方程,TTI

在 $v_{sz}^2=0$ 时,式(1)简化为:

$$\omega^4 = (v_{px}^2 T_2 + v_{pz}^2 T_1) \omega^2 + v_{pz}^2 (v_{pn}^2 - v_{px}^2) T_1 T_2. \quad (3)$$

基于以上关系,通过引入一个辅助波场函数 $q(\omega, k_x, k_z)$,可以得到 TTI 介质二阶耦合 qP 波波动方程^[10,18]:

$$\begin{cases} \partial^2 p / \partial t^2 = v_{px}^2 H_2 p + v_{pz} v_{pn} H_1 q, \\ \partial^2 q / \partial t^2 = v_{pz} v_{pn} H_2 p + v_{pz}^2 H_1 q. \end{cases} \quad (4)$$

偏微分算子为:

$$\begin{cases} H_1 = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \\ H_2 = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sin 2\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}. \end{cases} \quad (5)$$

在后面的公式中,为方便,均令 $v_{pz} = v_p$,

那么,将式(4)整理得:

介质波动方程中多了混合偏导数项,这在差分的过程中增加了计算复杂程度。空间混合偏导数可以先沿一个方向(如 x)求取偏导数,再对其结果沿另一个方向(如 z)求取偏导数得到。若函数 $u(x, z)$ 的某阶混合偏导数连续,则该偏导数的结果与求导顺序无关。一阶偏导数的差分系数可以由方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^1 & \cdots & N^1 \\ 1 & 2^3 & \cdots & N^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2N-1} & \cdots & N^{2N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

确定^[19]。解系数方程可得:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} \prod_{i=1, i \neq n}^N i^2}{2n \prod_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2) \prod_{i=n+1}^N (i^2 - n^2)}, \quad (11)$$

该式所求即为一阶导数不同差分精度的差分权系数。则有:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N a_n [u(x+n\Delta x) - u(x-n\Delta x)], \quad (12)$$

那么二阶混合偏导数可以写成:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \sum_{n_1 \neq 0}^N \sum_{n_2 \neq 0}^N \frac{n_1}{|n_1|} \cdot \frac{n_2}{|n_2|} a_{|n_1|} a_{|n_2|} u(x+n_1 \Delta x, z+n_2 \Delta z), \quad (13)$$

这里, $a_{|n_1|}$ 、 $a_{|n_2|}$ 对应一阶导数的权系数值,且 $a_0=0$ 。

根据以上推导可得二维 TTI 介质时间 2 阶、空间 2N 阶差分精度的有限差分格式为:

$$\begin{cases} p_{i,j}^{k+1} = 2p_{i,j}^k - p_{i,j}^{k-1} + v_p^2 \left[(1 + 2\varepsilon) (\cos^2 \theta \cdot M_1 + \sin^2 \theta \cdot M_2 - \sin 2\theta \cdot K_1) + \right. \\ \left. \sqrt{1 + 2\delta} (\sin^2 \theta \cdot M_3 + \cos^2 \theta \cdot M_4 + \sin 2\theta \cdot K_2) \right], \\ q_{i,j}^{k+1} = 2q_{i,j}^k - q_{i,j}^{k-1} + v_p^2 \left[\sqrt{1 + 2\delta} (\cos^2 \theta \cdot M_1 + \sin^2 \theta \cdot M_2 - \sin 2\theta \cdot K_1) + \right. \\ \left. (\sin^2 \theta \cdot M_3 + \cos^2 \theta \cdot M_4 + \sin 2\theta \cdot K_2) \right], \end{cases} \quad (14)$$

其中,

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[c_0 p_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (p_{i+n,j}^k + p_{i-n,j}^k) \right] \\ M_2 = \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[c_0 q_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (q_{i,j+n}^k + q_{i,j-n}^k) \right] \\ M_3 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[c_0 q_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (q_{i+n,j}^k + q_{i-n,j}^k) \right] \\ M_4 = \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[c_0 q_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (q_{i,j+n}^k + q_{i,j-n}^k) \right] \\ K_1 = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \frac{n_1}{|n_1|} \cdot \frac{n_2}{|n_2|} a_{|n_1|} a_{|n_2|} p_{i+n_1,j+n_2}^k \\ K_2 = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \frac{n_1}{|n_1|} \cdot \frac{n_2}{|n_2|} a_{|n_1|} a_{|n_2|} q_{i+n_1,j+n_2}^k \end{cases}$$

3 完全匹配层(PML)吸收边界条件

边界反射的处理是正演模拟中的一个重要问题。目前效果最好、应用最广泛的是 1994 年由 Berenger^[20] 从电磁领域引入的完全匹配层 (PML) 边界条件。理论上,该边界条件可以完全吸收以任意角度、任意频率入射的波动,很多学者在此基础上进行了研究^[21-22]。下面介绍了基于 TTI 介质的改进的 PML 边界控制方程,并给出了其相应的高阶有限差分格式。

首先,在复数空间进行坐标变换^[21-22],得到复数空间坐标系下的 TTI 介质二阶拟声波波动方程为(以方程(6)第一式的左边界为例,其它边界同理):

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 P(x,z,\omega) = & (1 + 2\varepsilon) \cdot v_p^2 \cdot \left\{ \cos^2 \theta \left[\left(\frac{i\omega}{i\omega + d_x} \right)^2 \frac{\partial^2 P(x,z,\omega)}{\partial x^2} - \frac{(i\omega)^2 d_x'}{(i\omega + d_x)^3} \frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x} \right] + \right. \\ & \left. \sin^2 \theta \frac{\partial^2 P(x,z,\omega)}{\partial z^2} - \sin 2\theta \frac{i\omega}{i\omega + d_x} \frac{\partial^2 P(x,z,\omega)}{\partial x \partial z} \right\} + \\ & \sqrt{1 + 2\delta} \cdot v_p^2 \cdot \left\{ \sin^2 \theta \left[\left(\frac{i\omega}{i\omega + d_x} \right)^2 \frac{\partial^2 Q(x,z,\omega)}{\partial x^2} - \frac{(i\omega)^2 d_x'}{(i\omega + d_x)^3} \frac{\partial Q(x,z,\omega)}{\partial x} \right] + \right. \\ & \left. \cos^2 \theta \frac{\partial^2 Q(x,z,\omega)}{\partial z^2} + \sin 2\theta \frac{i\omega}{i\omega + d_x} \frac{\partial^2 Q(x,z,\omega)}{\partial x \partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $P(x,z,\omega)$, $Q(x,z,\omega)$ 为 p 、 q 关于时间的傅里叶变换; d_x 为衰减函数, x 是到吸收层内边界的距离; d_x' 为 d_x 关于 x 的一阶导数。

对于 TTI 介质二阶拟声波方程(15), 方程中等号右边共有 6 项二阶偏导数项, PML 边界条件将波

场分裂成 6 部分, 即:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6. \quad (16)$$

结合方程(16), 向方程(15)中引入中间变量

G_1, G_2 , 得到 PML 吸收边界条件:

$$\begin{cases} (i\omega + d_x)^2 P_1(x,z,\omega) = (1 + 2\varepsilon) \cos^2 \theta \left[v_p^2 \frac{\partial^2 P(x,z,\omega)}{\partial x^2} + G_1(x,z,\omega) \right], G_1(x,z,\omega) = -v_p^2 \frac{d_x'}{i\omega + d_x} \frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x}, \\ (i\omega)^2 P_2(x,z,\omega) = v_p^2 (1 + 2\varepsilon) \sin^2 \theta \frac{\partial^2 P(x,z,\omega)}{\partial z^2}, i\omega (i\omega + d_x) P_3(x,z,\omega) = -v_p^2 (1 + 2\varepsilon) \sin 2\theta \frac{\partial^2 P(x,z,\omega)}{\partial x \partial z}, \\ (i\omega + d_x)^2 P_4(x,z,\omega) = \sqrt{1 + 2\delta} \sin^2 \theta \left[v_p^2 \frac{\partial^2 Q(x,z,\omega)}{\partial x^2} + G_2(x,z,\omega) \right], G_2(x,z,\omega) = -v_p^2 \frac{d_x'}{i\omega + d_x} \frac{\partial Q(x,z,\omega)}{\partial x}, \\ (i\omega)^2 P_5(x,z,\omega) = v_p^2 \sqrt{1 + 2\delta} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 Q(x,z,\omega)}{\partial z^2}, i\omega (i\omega + d_x) P_6(x,z,\omega) = v_p^2 \sqrt{1 + 2\delta} \sin 2\theta \frac{\partial^2 Q(x,z,\omega)}{\partial x \partial z}, \\ P(x,z,\omega) = P_1(x,z,\omega) + P_2(x,z,\omega) + P_3(x,z,\omega) + P_4(x,z,\omega) + P_5(x,z,\omega) + P_6(x,z,\omega), \end{cases} \quad (17)$$

对上式关于 ω 作傅里叶反变换,可以得到时间域的 PML 吸收边界条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + d_x)^2 p_1 = (1 + 2\varepsilon) \cos^2 \theta \left[v_p^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + g_1(x, z, t) \right] \\ (\partial_t + d_x) g_1(x, z, t) = -v_p^2 \cdot d'_x \frac{\partial p}{\partial x} \\ \partial_t^2 p_2 = v_p^2 (1 + 2\varepsilon) \sin^2 \theta \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \\ (\partial_t^2 + d_x \cdot \partial_t) p_3 = -v_p^2 (1 + 2\varepsilon) \sin 2\theta \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \\ (\partial_t + d_x)^2 p_4 = \sqrt{1 + 2\delta} \sin^2 \theta \left[v_p^2 \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + g_2(x, z, t) \right] \\ (\partial_t + d_x) g_2(x, z, t) = -v_p^2 \cdot d'_x \frac{\partial q}{\partial x} \\ \partial_t^2 p_5 = v_p^2 \cdot \sqrt{1 + 2\delta} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \\ (\partial_t^2 + d_x \cdot \partial_t) p_6 = v_p^2 \cdot \sqrt{1 + 2\delta} \sin 2\theta \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial z} \\ p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \end{array} \right. \quad (18)$$

其中, $g_1(x, z, t)$ 、 $g_2(x, z, t)$ 分别为 $G_1(x, z, \omega)$ 、 $G_2(x, z, \omega)$ 的傅里叶反变换。

那么,很容易得出方程(6)第一式左边界的 PML 边界高阶有限差分格式为:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + \Delta t d_x + \frac{(\Delta t d_x)^2}{2}} \left\{ 2p_{1i,j}^k + \left[\Delta t d_x - \frac{(\Delta t d_x)^2}{2} - 1 \right] p_{1i,j}^{k-1} + \Delta t^2 (1 + 2\varepsilon) \cos^2 \theta \left(v_p^2 \cdot M_1 + \frac{g_{1i,j}^{k+1} + g_{1i,j}^k}{2} \right) \right\} \\ g_{1i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t \cdot d_x}{2}} \left[\left(1 - \frac{\Delta t \cdot d_x}{2} \right) g_{1i,j}^k - v_p^2 \cdot \Delta t \cdot d'_x \cdot D_1 \right] \\ p_{2i,j}^{k+1} = 2p_{2i,j}^k - p_{2i,j}^{k-1} + \Delta t^2 \cdot v_p^2 (1 + 2\varepsilon) \sin^2 \theta \cdot M_2 \\ p_{3i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + \frac{d_x \cdot \Delta t}{2}} \left[2p_{3i,j}^k + \left(\frac{d_x \cdot \Delta t}{2} - 1 \right) \cdot p_{3i,j}^{k-1} - v_p^2 \Delta t^2 (1 + 2\varepsilon) \sin 2\theta \cdot K_1 \right] \\ p_{4i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + \Delta t d_x + \frac{(\Delta t d_x)^2}{2}} \left\{ 2p_{4i,j}^k + \left[\Delta t d_x - \frac{(\Delta t d_x)^2}{2} - 1 \right] p_{4i,j}^{k-1} + \Delta t^2 \sqrt{1 + 2\delta} \sin^2 \theta \left(v_p^2 \cdot M_3 + \frac{g_{2i,j}^{k+1} + g_{2i,j}^k}{2} \right) \right\} \\ g_{2i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t \cdot d_x}{2}} \left[\left(1 - \frac{\Delta t \cdot d_x}{2} \right) g_{2i,j}^k - v_p^2 \cdot \Delta t \cdot d'_x \cdot D_2 \right] \\ p_{5i,j}^{k+1} = 2p_{5i,j}^k - p_{5i,j}^{k-1} + \Delta t^2 \cdot v_p^2 \sqrt{1 + 2\delta} \cos^2 \theta \cdot M_4 \\ p_{6i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + \frac{d_x \cdot \Delta t}{2}} \left[2p_{6i,j}^k + \left(\frac{d_x \cdot \Delta t}{2} - 1 \right) \cdot p_{6i,j}^{k-1} + v_p^2 \Delta t^2 \sqrt{1 + 2\delta} \sin 2\theta \cdot K_2 \right] \\ p_{i,j}^{k+1} = p_{1i,j}^{k+1} + p_{2i,j}^{k+1} + p_{3i,j}^{k+1} + p_{4i,j}^{k+1} + p_{5i,j}^{k+1} + p_{6i,j}^{k+1} \end{array} \right. \quad (19)$$

其中:

$$\begin{cases}
 M_1 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[c_0 p_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (p_{i+n,j}^k + p_{i-n,j}^k) \right] \\
 M_2 = \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[c_0 p_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (p_{i,j+n}^k + p_{i,j-n}^k) \right] \\
 M_3 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[c_0 q_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (q_{i+n,j}^k + q_{i-n,j}^k) \right] \\
 M_4 = \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[c_0 q_{i,j}^k + \sum_{n=1}^N c_n (q_{i,j+n}^k + q_{i,j-n}^k) \right] \\
 D_1 = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N a_n [p_{i+n,j}^k - p_{i-n,j}^k] \\
 D_2 = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N a_n [q_{i+n,j}^k - q_{i-n,j}^k] \\
 K_1 = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \sum_{\substack{n_1=-N \\ n_1 \neq 0}}^N \sum_{\substack{n_2=-N \\ n_2 \neq 0}}^N \frac{n_1}{|n_1|} \cdot \frac{n_2}{|n_2|} a_{|n_1|} a_{|n_2|} p_{i+n_1,j+n_2}^k \\
 K_2 = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \sum_{\substack{n_1=-N \\ n_1 \neq 0}}^N \sum_{\substack{n_2=-N \\ n_2 \neq 0}}^N \frac{n_1}{|n_1|} \cdot \frac{n_2}{|n_2|} a_{|n_1|} a_{|n_2|} q_{i+n_1,j+n_2}^k
 \end{cases} \quad (20)$$

同理可得方程(6)第二式左边界的 PML 边界控制方程及高阶有限差分格式。

在利用完全匹配层边界条件对边界进行处理时,衰减函数的选择至关重要。如果选择的衰减函数不合适,将会产生不同程度的边界反射,无法发挥出 PML 边界的优势。Hastings 等^[23]、Collino 等^[21]、Groby 等^[24]都对衰减函数进行了发展,以下为文中所用的衰减函数:

$$\begin{cases}
 d_i(i) = d_0(i/\delta)^4 \\
 d_0 = \frac{3v_p}{2\delta} \cdot \log\left(\frac{1}{R}\right)
 \end{cases} \quad (21)$$

其中, i 为计算网格点到吸收层内边界的距离,分为 x 、 z 两个方向; δ 为 PML 吸收层的厚度; R 为理论反射系数,一般取 $0.01 \sim 1.0 \times 10^{-6}$; v_p 为波速; d_0 为反射系数函数。

根据 PML 边界条件的理论,分别在波场的 x 、 z 方向对波场边界进行衰减,那么,在计算区域外就会被划分为 8 个区域,如图 1 所示,其中箭头所指的区域为内部计算区域,剩下的区域为边界。文中采用与以往 PML 边界不同的划分方案,分别沿 x 、 z 方向把波场分成 3 个区域,两个衰减区域,一个内部计算区域。图 2 所示,为文中采用的衰减函数 $d_x(x)$ 、 $d_z(z)$ 的设置方式。可以看出,将图 2 所示的两个衰减函数衰减示意图重叠之后的未被衰减的区域与图 1 所示的内部计算区域是一致的。这样划分可以保证在 4 个角点区域波场沿 x 方向和 z 方向都被衰减,不需要单独对边界 4 个角点区域进行处理,同时

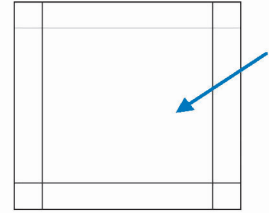
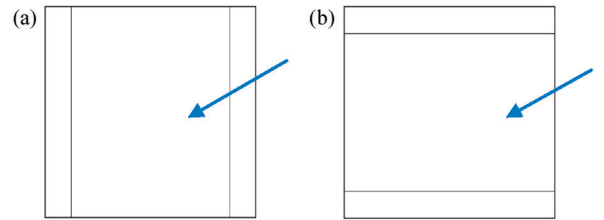


图 1 PML 边界处理示意



a— x 方向衰减函数 d_x ; b— z 方向衰减函数 d_z

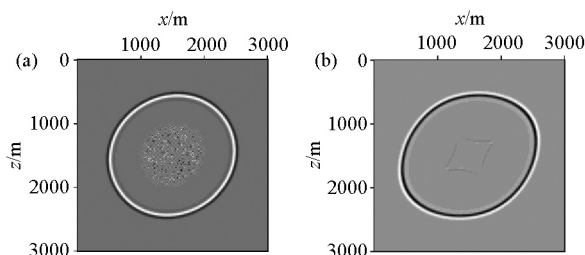
图 2 本文采用的 PML 边界衰减函数分布方式示意

又避免了以往 PML 边界 8 个衰减区域的繁琐,编程实现时更简便。PML 边界处理示意如图 2。

4 稳定性分析

由于波动方程的刚度矩阵要求是对称正定的^[25],当我们令 $v_{sz}=0$ 进行声学近似时,会引起 qSV 波的不稳定。对于直接令 $v_{sz}=0$ 声学近似的方程,要求各向异性参数符合 $\varepsilon \geq \delta$ 这个条件^[26],否则,会引起数值求解的不稳定现象。另外,在倾角 θ 变化较大的区域,声波近似处理也会造成不稳定。这一问题可以通过对模型进行平滑处理来解决,但这种

做法会损失运动学上的精确性。图 3 为 $\theta=30^\circ$ 时选用不同的参数分别满足 $\varepsilon<\delta$ 与 $\varepsilon\geq\delta$ 的情况下的数值模拟结果,以此来验证稳定性条件。图 3a 选用参数为 $\varepsilon=0.10$ 、 $\delta=0.12$, 波场快照的中央出现了数值不稳定现象。由于 ε 、 δ 值很接近, 波形比较接近椭圆各向异性的情况。图 3b 选用参数为 $\varepsilon=0.25$ 、 $\delta=0.10$, 快照中未发现不稳定现象。因此, 我们用拟声波方程进行数值模拟时需满足 $\varepsilon\geq\delta$ 的条件。



a— $\varepsilon<\delta$; b— $\varepsilon\geq\delta$

图 3 稳定性对比

$$v_{sz\,ph}(\theta) = \frac{v_{pz}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2\varepsilon\sin^2\theta - \sqrt{(1 + 2\varepsilon\sin^2\theta)^2 - 2(\varepsilon - \delta)\sin^22\theta}}, \quad (22)$$

由式(22)可知, 当 $\varepsilon=\delta$ 时, 横波相速度为零, 这意味着介质中不存在这种干扰波的传播, 因而也就达到了压制伪横波的目的。后来, 很多学者对耦合拟声波方程进行解耦, 发展了纯 qP 波方程, 从而避免了伪横波的干扰^[14-15, 27], 但计算十分复杂; 也有学者利用滤波方法压制伪横波, 取得了很好的效果^[18]。

6 数值试验

6.1 均匀 TTI 介质模型

选用均匀 TTI 介质模型进行波场模拟测试, 进而认识 TTI 介质中的波场传播特征。计算模型为均匀 TTI 介质模型, 其各向异性参数为: $\varepsilon=0.25$, $\delta=0.1$, θ 分别取 0° 、 30° 、 45° 、 90° , $v_p=2\,500$ m/s。网格点数为 301×301 , 网格间距为 $\Delta x=\Delta z=10$ m, 时间采样间隔为 $\Delta t=1$ ms, 记录时间为 800 ms, 采用的雷克

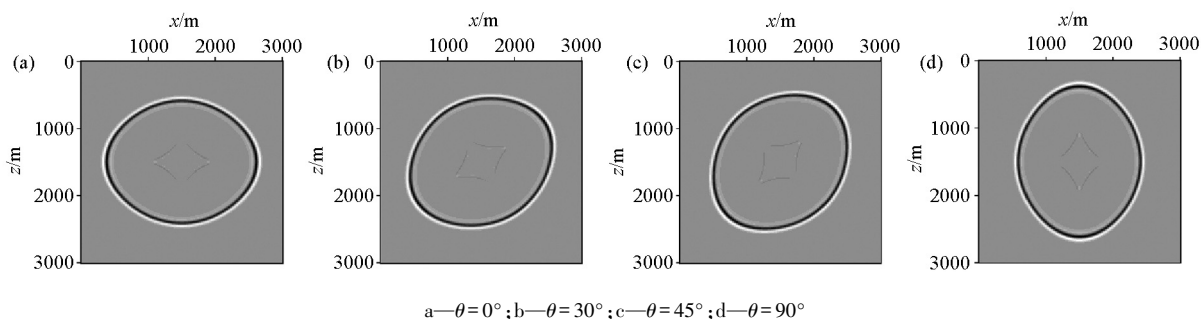
5 伪横波的压制方法

在声学近似的情况下, 尽管把沿着对称轴方向的横波速度设为零, 但是沿着其他传播方向的横波相速度并不等于零, 另外, 其群速度也是非零的, 从而产生一种低波速、低振幅的 qSV 波人为干扰^[26], 在图 4 中可以看出其波前面呈现出菱形状的波形。它不仅带来噪声干扰, 而且, 由于其波速较小, 还会产生较为严重的数值频散, 进而影响正演模拟和逆时偏移成像的数值精度。因此, 必须对此伪横波噪声予以压制或消除。

在声学近似的条件下, 可以通过设置各向同性层或者椭圆各向异性层来消除伪横波噪声的影响, 具体做法是在激发震源附近设置震源环^[9], 也即, 在以震源为中心的圆内使 Thomsen 参数 $\varepsilon=\delta$ 。式(22)为各向异性介质横波相速度公式^[26]:

子波震源的主频为 30 Hz, 震源置于模型中心位置。采用时间 2 阶、空间 8 阶有限差分法求解方程(6)进行数值模拟, 图 4、图 5 为得到的波场快照。

图 4、图 5 分别是波场两个分量的快照。图 4a 到图 4d 分别代表 TTI 介质第 400 ms 倾角 θ 等于 0° 、 30° 、 45° 、 90° 时 p 的波场快照。图 5a 到图 5d 分别代表 TTI 介质第 400 ms 倾角 θ 等于 0° 、 30° 、 45° 、 90° 时 q 的波场快照。图中传播较快的外层的波形是 qP 波, 而内部传播较慢的、呈菱形状的波形是伪横波。通过波场快照可以发现, 空间 8 阶已较好地满足精度要求, 对频散压制效果也很好, 可以兼顾计算效率与数值精度。由于拟声波数值模拟研究的是 qP 波, 伪横波是作为一种噪声干扰出现的, 结合图 4、图 5, 下面的分析我们将只研究波场 p 。图 6a、图 7a 分别是 $\theta=30^\circ$ 时, 在未加边界条件的情况下的波场快照和单炮地震记录。无论是波场快照, 还是地



a— $\theta=0^\circ$; b— $\theta=30^\circ$; c— $\theta=45^\circ$; d— $\theta=90^\circ$

图 4 二维 TTI 介质中传播时间为 400 ms 时 p 的波场快照

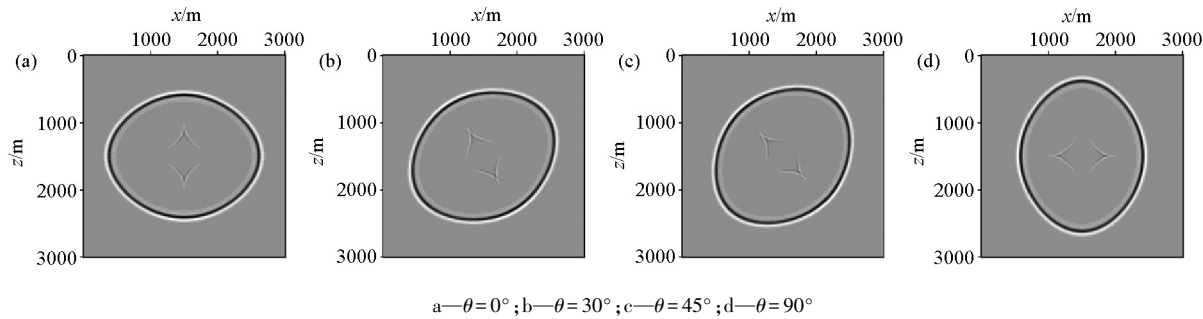


图 5 二维 TTI 介质中传播时间为 400 ms 时 q 的波场快照

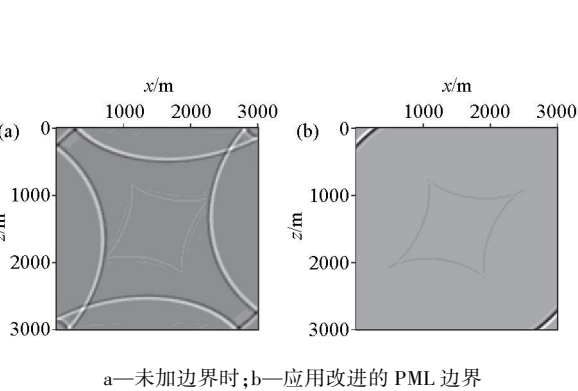


图 6 $\theta=30^\circ$ 时 800 ms 的波场快照对比

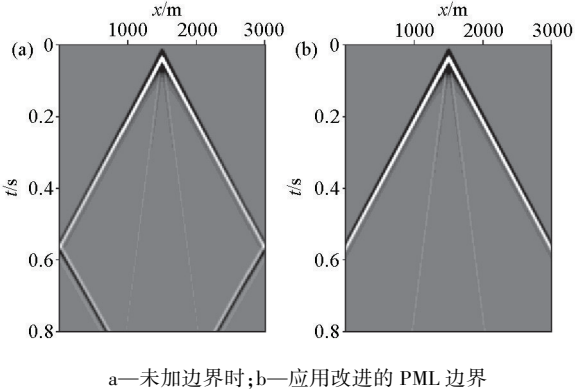


图 7 $\theta=30^\circ$ 时的单炮地震记录对比

震记录都可以十分明显地看到边界反射十分严重。图 6b、图 7b 分别是 $\theta=30^\circ$ 时,应用改进的 PML 边界控制方程后的波场快照和地震记录,边界层厚度为 20 层。通过与图 6a、图 7a 对比,边界处没有明显的边界反射,吸收效果显而易见。从而说明,改进的 PML 边界方程是十分有效的。图 8 是 $\theta=0^\circ$ 时应用本文的 PML 边界条件的快照,这相当于 VTI 介质的情况,记录时间为 2 000 ms。在 800 ms 的快照中可以发现对 qP 波的吸收效果是很理想的;在 2 000 ms 时, qSV 波也传播到了边界,改进的 PML 边界控制

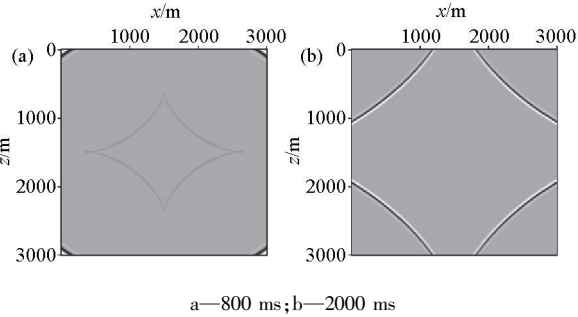


图 8 $\theta=0^\circ$ 时应用本文的 PML 边界条件的波场快照

6.2 TTI 介质 BP_partI 模型

为了验证本文使用的拟声波方程的稳定性和 PML 边界方程的适应性,文中对 BP2007 模型进行了测试。由于原始模型较大,选取了其中较典型的两部分侵入构造做数值模拟。下面利用时间二阶、空间十二阶有限差分对 TTI 介质 BP_partI 模型进行

方程对 qSV 波的吸收效果也很好,并未因其速度低而在边界处产生数值频散。

文中采用加载震源环的方法对拟声波方程中的伪横波进行压制,该方法简单易行,在以震源点为圆心、向外延伸 10 个网格点为半径的圆内令 $\varepsilon=\delta=0.25$ 即可。从图 4、图 5 的波场快照可以清晰地看出, qP 波内部出现了速度更低的 qSV 波。从图 9 可以看出, $\theta=0^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 时,经过加载震源环,快照中间的菱形状的波形已经看不到了。与图 4、图 5 的结果相比,快照中的伪横波得到了很好的压制。

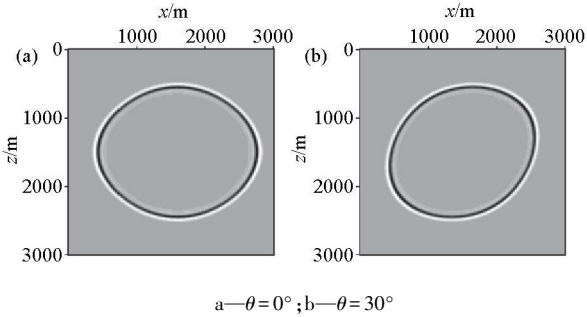


图 9 压制伪横波后 400 ms 的波场快照

正演模拟。模型参数为: δ 、 ε 、 θ 、 v_p ,如图 10 所示,在该模型中 $\theta=0^\circ$,即相当于 VTI 介质的情况。模型网格点数为 525×451 ,网格间距为 $\Delta x=\Delta z=10$ m,时间采样间隔为 $\Delta t=1$ ms,记录时间为 2.6 s,采用的雷克子波主频为 30 Hz,震源置于模型网格点 (263, 1) 处,所加的 PML 边界厚度为 30 层。

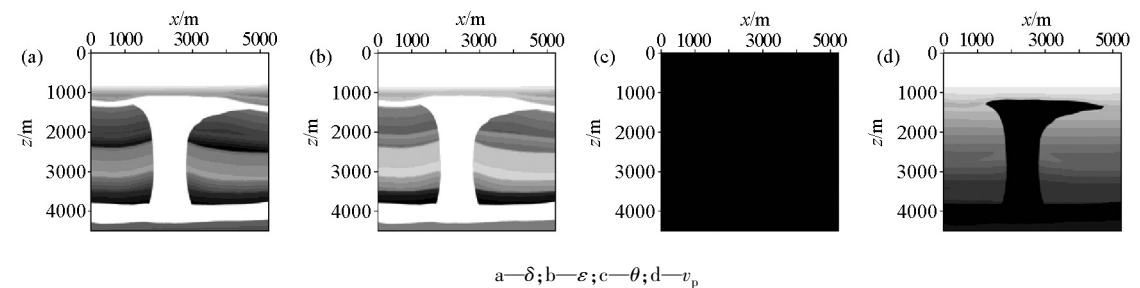


图 10 BP_partI 模型参数

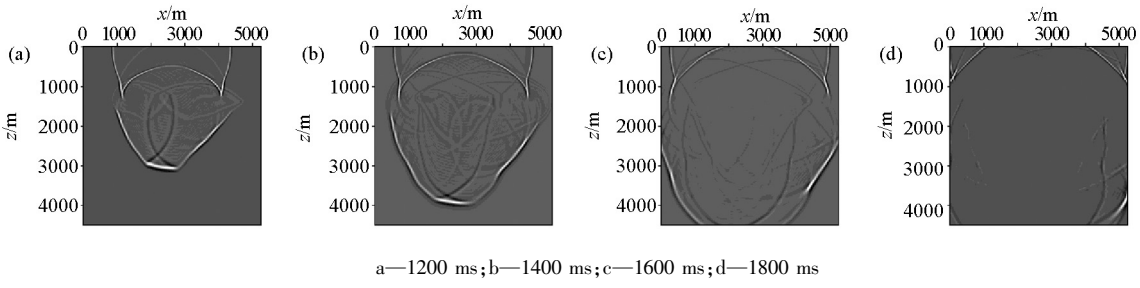


图 11 BP_partI 模型波场快照

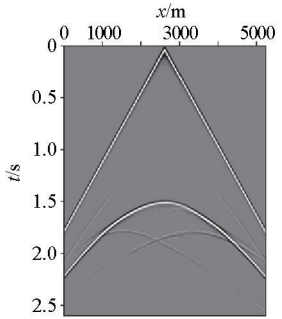


图 12 BP_partI 模型单炮地震记录

图 11、图 12 给出的是 BP_partI 模型应用本文的方程得出的快照和单炮记录。通过分析可知,虽然模型十分复杂,但波场在传播的过程中是十分稳定的,可以清楚地认识波场特征,直到波场传播出模

型区域都没有出现奇异值;另外,应用本文的边界条件后,未发现边界反射,观察图 11d,上下边界的处理效果最为明显,在单炮记录上也未发现边界反射问题。但在模型低速区有轻微的频散现象,表现为许多与波前面平行的弧形干扰,见图 11a。

6.3 TTI 介质 BP_partII 模型

同样利用时间二阶、空间十二阶有限差分对 TTI 介质 BP_partII 模型进行正演模拟。其中,模型参数为: δ 、 ϵ 、 θ 、 v_p ,如图 13 所示。模型网格点数为 461×451 ,网格间距为 $\Delta x = \Delta z = 10 \text{ m}$,时间采样间隔为 $\Delta t = 1 \text{ ms}$,记录时间为 2.4 s ,采用的雷克子波的主频为 30 Hz ,震源置于模型网格点 $(231, 1)$ 处,所加的 PML 边界厚度为 30 层。

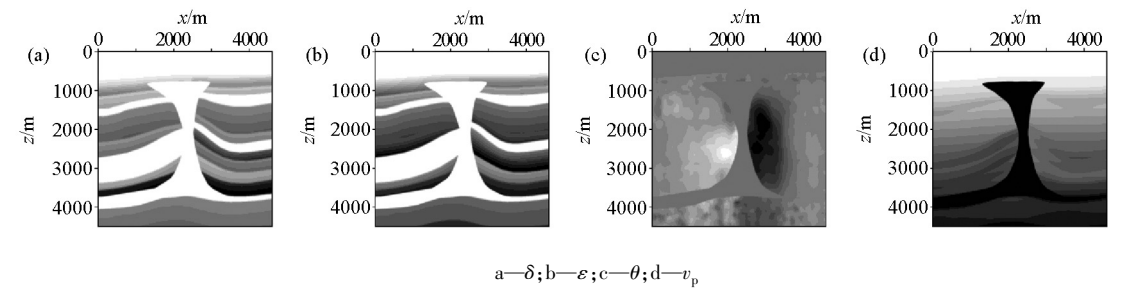


图 13 BP_partII 模型参数

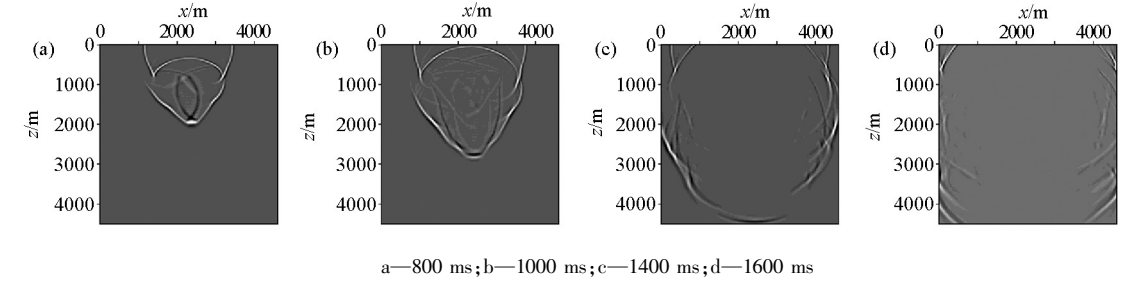


图 14 BP_partII 模型波场快照

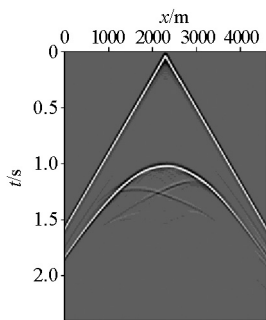
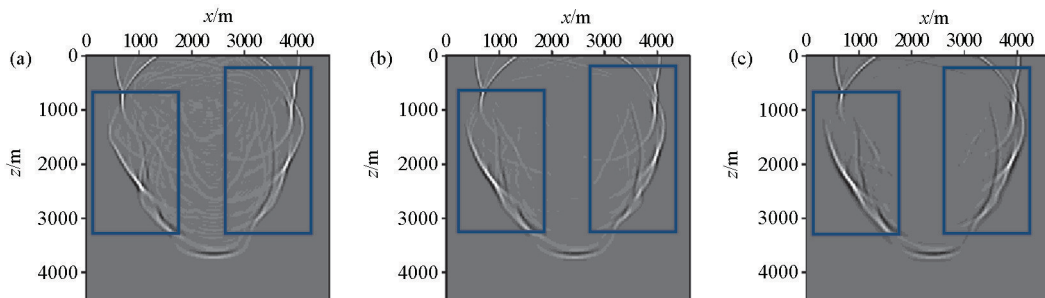


图 15 BP_partII 模型单炮地震记录

图 14、图 15 是 BP_partII 模型的波场快照和单炮记录。从图中可以看出波场在更新的过程中波形稳定,在波前到达边界时也没有边界反射,观察图 14c、14d,上下边界的吸收效果看得比较直观。在地震记录上就看的更加清晰,在直达波未去除的情况下,在边界处,直达波与反射波均无边界反射问题。从而证明了本文使用的拟声波方程是稳定的,改进后的 PML 边界控制方程也是有效的。



a—各向同性介质;b—VTI 介质;c—TTI 介质

图 16 BP 模型不同介质情况下 1 200 ms 的波场快照

7 结论

文中对 TTI 介质数值模拟中几个比较关键的问题,边界条件、稳定性、伪横波压制进行了分析。基于频散关系得到了 TTI 介质二阶耦合方程,通过数值模拟验证了所使用的方程的稳定性,并给出了其高阶有限差分格式;在边界处理时采用 PML 吸收边界条件,并采用一种与以往不同的衰减函数设置方式,通过坐标变换得到了改进的 PML 边界控制方程,最后给出了边界控制方程的高阶有限差分格式,经过模型试算,证明了文中所用的 PML 边界控制方程的有效性。在压制伪横波上,笔者采用了加载震源环的方法,效果较好,但是波场中间依然有少量残余伪横波的存在。为避免伪横波的影响,很多学者对耦合的拟声波方程进行解耦推导了纯 qP 波方程^[12,14-15],这也将是以后的研究内容。为验证 TTI 介质拟声波方程可以准确地模拟强各向异性和倾角

与各向同性介质、VTI 介质相比,TTI 介质由于考虑了各向异性参数 δ 、 ε 以及倾角 θ ,反射旅行时和波形振幅会发生改变,波前面形态也会发生扭曲,但反映出的波场传播规律也是更接近实际地下介质的。文中采用的边界条件亦可以推广至各向同性介质和 VTI 介质。图 16 是 BP 模型分别在各向同性介质、VTI 介质以及 TTI 介质的情况下得出的波场快照,方框中圈出的部分是 3 张快照有区别的地方。通过与 TTI 介质的情况相比,可以看出其波形上的差异。图 16c 中圈出的部分比图 16b 中的波形更清晰,杂乱的波形相对减少,波形变得更为连续。TTI 介质比 VTI 介质多考虑了倾角的因素,从图 13c 可看出倾角 θ 在侵入岩体两侧的变化较大,因而图 16 中的不同也将体现在岩体的两侧,右侧更为明显。由于 TTI 介质考虑了更多的地下介质参数,因而反映的波场也是更接近实际情况的。

剧烈变化区域的波场特点,文中还通过 TTI 介质 BP2007 模型进行了验证,分析了 TTI 介质拟声波方程对该模型的数值模拟结果,比较了各向同性介质、VTI 介质、TTI 介质波场快照中的不同,从而说明 TTI 介质的数值模拟可以更准确地描述地下波场的传播规律。另外,本文的研究成果将为 TTI 介质的逆时偏移等技术提供有力的支持。

参考文献:

- [1] 牟永光,裴正林.三维复杂介质地震数值模拟[M].北京:石油工业出版社,2005:1-13.
- [2] Alkhalifah T. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media [J]. Geophysics, 1998, 63(2): 623-631.
- [3] Alkhalifah T. An acoustic wave equation for anisotropic media [J]. Geophysics, 2000, 65(4): 1239-1250.
- [4] Zhou H, Zhang G, Bloor R. An anisotropic acoustic wave equation for VTI media [C]//68th EAGE Conference and Exhibition Incorporating SPE EUROPEC 2006. Vienna, Austria: EAGE, 2006: H033.
- [5] Du X, Fletcher R, Fowler P J. A new pseudo-acoustic wave equa-

- tion for VTI media [C]//70th EAGE Conference and Exhibition Incorporating SPE EUROPEC 2008.Rome;European Association of Geoscientists and Engineers,2008;1-5.
- [6] Hestholm S.Acoustic VTI modeling using high-order finite differences [J].Geophysics,2009,74(5):T67-T73.
- [7] Zhou H B,Zhang G Q,Bloor R.An anisotropic acoustic wave equation for modeling and migration in 2D TTI media[C]//Expanded Abstracts of 76th SEG Annual International Meeting.Tulsa,OK;SEG,2006;194-198.
- [8] Fletcher R,Du X,Fowler P J.A new pseudo-acoustic wave equation for TI media [C]//Expanded Abstracts of 78th SEG Annual Internet Meeting.Tulsa,OK;SEG,2008;2082-3086.
- [9] Duveneck E,Milcik P,Bakker P M,et al.Acoustic VTI wave equations and their application for anisotropic reverse-time migration [C]//Expanded Abstracts of 78th SEG Annual International Meeting.Tulsa,OK;SEG,2008;2186-2190.
- [10] Duveneck E,Bakker P M.Stable P-wave modeling for reverse-time migration in tilted TI media [J].Geophysics,2011,76(2):S65-S75.
- [11] Fowler P J,Du X,Fletcher R P.Coupled equations for reverse time migration in transversely isotropic media [J].Geophysics,2010,75(1):S11-S22.
- [12] Liu F Q,Morton S A,Jiang S S,et al.Decoupled wave equations for P and SV waves in an acoustic VTI media [C]//SEG Technical Program Expanded Abstracts 2009.Tulsa,OK;SEG,2009;2844-2848.
- [13] Pestana R C,Ursin B,Stoffa P L.Separate P- and SV-wave equations for VTI media [C]//SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011.Tulsa,OK;SEG,2011;163-167.
- [14] Chu C L,Macy B K,Anno P D.An accurate and stable wave equation for pure acoustic TTI modeling [C]//SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011.Tulsa,OK;SEG,2011;179-184.
- [15] Zhan G,Pestana R C,Stoffa P L.An acoustic wave equation for pure P wave in 2D TTI media [C]//SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011.Tulsa,OK;SEG,2011;168-173.
- [16] Barrera Pacheco D F,Pestana R,Vivas F.New pseudo-acoustic wave equations for modeling and reverse time migration in TTI media [C]//75th EAGE Conference & Exhibition Incorporating SPE EUROPEC 2013.London;SPE,2013.
- [17] Thomsen L.Weak elastic anisotropy [J].Geophysics,1986,51(10):1954-1966.
- [18] 张岩,吴国忱.TTI 介质 qP 波逆时偏移中伪横波噪声压制方法 [J].地球物理学报,2013,56(6):2065-2076.
- [19] 刘洋,李承楚,牟永光.任意偶数阶精度有限差分法数值模拟 [J].石油地球物理勘探,1998,33(1):1-10.
- [20] Berenger J P.A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves [J].Journal of Computational Physics,1994,114(2):185-200.
- [21] Collino F,Tsogka C.Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media [J].Geophysics,2001,66(1):294-307.
- [22] Komatitsch D,Tromp J.A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation [J].Geophysical Journal International,2003,154(1):146-153.
- [23] Hastings F D,Schneider J B,Broschat S L.Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation [J].The Journal of the Acoustical Society of America,1996,100(5):3061-3069.
- [24] Groby J P,Tsogka C.A time domain method for modeling viscoacoustic wave propagation [J].Journal of Computational Acoustics,2004,14(2):201-236.
- [25] Tsvankin I.Seismic signatures and analysis of reflection data in anisotropic media [M].London:Pergamon,2001.
- [26] Grechka V,Zhang L B,Rector J W.Shear waves in acoustic anisotropic media [J].Geophysics,2004,69(2):576-582.
- [27] Xu S,Zhou H B.Accurate simulations of pure quasi-P-waves in complex anisotropic media [J].Geophysics,2014,79(6):T341-T348.

Numerical simulation of pseudo acoustic wave equation in TTI medium

HUANG Jie,YANG Guo-Quan,LI Zhen-Chun,GU Bing-Luo

(School of Geosciences,China University of Petroleum (East China),Qingdao 266580,China)

Abstract: TTI qP wave numerical simulation method is more accurate than VTI qP wave numerical simulation method in describing the propagation law of seismic wavefield in anisotropic medium because of considering the dip angle factor.Using the pseudo acoustic wave equation,the authors carried out high order finite difference numerical simulation of the seismic wavefield in the TTI medium in this paper.After improving the distribution of the attenuation function,the authors used the improved perfectly matched layer (PML) boundary control equation to deal with the wavefield boundary and achieved good results.Then the pseudo shear wave in the numerical simulation of pseudo acoustic wave equation was suppressed and the stability problem was analyzed.The numerical simulation of different models prove that the TTI medium pseudo acoustic wave equation is stable and the PML boundary control equations have high reliability and applicability.

Key words: TTI medium;pseudo acoustic wave equation;PML boundary control equation;stability;pseudo shear wave

(本文编辑:叶佩)